带曲波域约束的全变差正则化抑噪方法

卢成武[1,2], 宋国乡[2]

(1. 重庆文理学院数学与计算机科学系, 重庆永川 402160; 2. 西安电子科技大学理学院, 陕西西安 710071)

摘 要: 为了减小曲波变换在图像抑噪应用中所出现的伪吉布斯振荡和/曲波状0伪曲线, 提出一种融合计算调和分析与变分法的图像抑噪方法. 首先引入第二代曲波紧框架, 对降质图像进行非线性曲波变换阈值, 然后由所保留系数确定可行域, 建立带曲波域约束条件的全变差正则化模型, 最后通过投影梯度算法进行求解. 实验结果表明该方法在抑噪和保持边缘的同时, 使这些失真得到有效地抑制, 取得了较为理想的视觉效果.

关键词: 曲波; 抑噪; 全变差; 非线性阈值

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2008) 04-0646-04

Total Variation Regularization Denoising Method with Constraint on Curvelet-Domain

LU Cheng-wu[1,2], SONG Guo-xiang[2]

(1. Department of Mathematics and Computer Sciences, Chongqing University of Arts and Sciences, Yongchuan, Chongqing 402160, China;
2. School of Science, Xidian University, Xi. an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: To reduce the pseudo-Gibbs effects and the/curvelet like0aliased curves resulted from using curvelet transform for image denoising, a noise removal method which combines computational harmonic analysis and variation is presented. Firstly, the nonlinear thresholding strategy is applied to the coefficients of the second generation curvelet transform of noisy image. And then, a total variation regularization model with constraint condition on curvelet transform domain is established, whose feasible domain is determined by the coefficients remained. Finally, the projected gradient algorithm is used to solve the model. Experiments show that the method can remove noisy and remain edges, while the distortions are suppressed efficiently, and that the vision effect has an advantage of improving.

Key words: curvelet; noisy removal; total variation; nonlinear thresholding

1 引言

图像抑噪是图像处理中一个基础性研究课题, 目前, 在该领域最具影响的研究方法当属以小波、脊波、曲波为代表的计算调和分析(Computational Harmonic Analysis, CHA)方法和以变分法、非线性扩散、水平集为代表的偏微分方程(Partial differential Equations, PDEs)方法. 二者孰优孰劣, 一直是学术界有争议的问题. 在以往的研究中, 它们作为不同的研究方向独自发展. 近年来, 为弥补二者各自的不足, 越来越多的学者致力于这两种方法的结合.

众所周知, 小波因具有良好的时频局域性、多分辨率特性以及对点奇异分片光滑函数的最优逼近性, 而得到非常广泛的应用. 然而在高维情形下, 由于函数的奇异性不仅仅是点奇异, 更多的表现为线奇异、面奇异, 因此小波不再是最优的. 为了有效表征高维函数的奇异性, Candes 和 Donoho 利用多尺度几何分析的思想, 相继提出了第一代和第二代曲波(curvelets)[1,2], 并已证明它们对 C^2 奇异性函数的逼近是最优的, 其逼近阶为 $O(n^{-2})$, 而张量积小波的逼近阶仅为 $O(n^{-1})$. Starck 等人已将第一代曲波变换应用于图像抑噪[3]. 但由于第一代曲波(又称多尺度脊波)是基于方块脊波定义的, 且该脊波不是真正的脊函数, 其几何形状尚不清楚, 另外, 第一代曲波变换除了计算复杂度高, 还会造成块效应, 所以其应用受到一定的制约. 第二代曲波不仅定义形式简单, 计算复杂度低, 而且克服了块效应. 2004 年 Candes 等人还给出了第二代曲波变换的快速数字实现算法[4]. 然而令人遗憾的是, 第二代曲波在图像抑噪应用中无法避免/曲波状0伪曲线的产生. 另外, 基于 CHA 的抑噪方法, 都不可避免地会出现伪吉布斯(pseudo-Gibbs)振荡现象.

基于全变差正则化的 PDEs 方法因具有较强的边缘保护能力, 文献[5]将小波与全变差正则化相结合用于图像压缩和抑噪, 文献[6, 7]将小波萎缩法和全变差正则化方法结合起来, 以减弱伪吉布斯振荡, 文献[8]进一步研究了小波萎缩法、非线性扩散和变分法之间的关系, 文献[9]给出了小波与全变差相结合的一个总框架. 不难看到, 为了充分发挥 CHA 方法和 PDEs 方法各自的

收稿日期: 2007-01-22; 修回日期: 2007-10-10

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

优势, 扬长避短, 将二者结合起来应用, 已成为可能. 本文正是将曲波对高维函数的稀疏表示能力和全变差正则化方法的边缘保护能力有机地结合起来, 在保护边缘等重要信息的前提下, 抑制第二代曲波抑噪时所产生的伪吉布斯振荡和/ 曲波状0伪曲线, 以期得到更为理想的视觉效果.

2　第二代曲波变换

第一代曲波(又称 99 曲波)[1] 实质上是基于多尺度划分的重叠局部脊波, 其定义结构复杂, 所用正交脊波的几何形状和尺度比关系尚不清楚. 最近 Candes 和 Donoho 提出了一种新的曲波紧框架, 称之为第二代曲波[2].

设 $W(r)$ ($r \in [0.5, 2]$), $V(t)$ ($t \in [-1, 1]$) 是一对非负的、实的光滑窗函数, 分别称为径窗和角窗, 且满足容许性条件:

$$\begin{cases} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} W^2(2^j r) = 1, & r \in (3/4, 3/2) \\ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V^2(t-l) = 1, & t \in (-1/2, 1/2) \end{cases}$$

定义极坐标频窗函数:

$$U_j(|N|, H) = 2^{-3j/4} W(2^{-j}|N|) V\left(2^{\lfloor j/2 \rfloor} H / 2P\right)$$

($j \geqslant j_0$, $N = (N_1, N_2) \in R^2$) 其中 $(|N|, H)$ 为 (N_1, N_2) 对应的极坐标. 窗函数 U_j 用于光滑地提取由二进冠 $\{2^j \leqslant |N| \leqslant 2^{j+1}\}$ 和角域 $\{-2^{-j/2}P \leqslant H \leqslant 2^{-j/2}P\}$ 所确定的频带.

假定 U_j 是函数 $U_j(x)$ 的傅立叶变换, 即 $\hat{U}_j(N) = U_j$. 将 $U_j(x)$ 看作是/ 母曲波0, 于是 2^{-j} 尺度下的曲波就可通过对其进行旋转和平移得到.

若令 R_H 表示旋转角为 H 的旋转矩阵, 则在 2^{-j} ($j \geqslant j_0$) 尺度下, 方向为 $H_l = 2Pl/2^{\lfloor j/2 \rfloor}$ ($l = 1, 2, \cdots, 0 \leqslant H \leqslant 2P$) 中心位置在 $x_k^{(j,l)} = R_{H_l}^{-1}(k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j/2})$ ($k = (k_1, k_2) \in Z^2$) 的曲波定义为:

$$U_{j,l,k}(x) = U_j\left(R_{H_l}(x - x_k^{(j,l)})\right) \quad (x \in R^2)$$

为下文表述方便起见, 记 $L = (j, l, k)$. 于是函数 $f(x) \in L^2(R^2)$ 的第二代曲波变换定义为:

$$C_L(f) = \int_{R^2} f(x) \overline{U_L(x)} \mathrm{d}x = \langle f, U_L \rangle \qquad (1)$$

由于上述所定义曲波是 $L^2(R^2)$ 的一紧框架, 所以在 L^2 意义下有如下重构公式:

$$f(x) = \sum_L \langle f, U_L \rangle U_L \qquad (2)$$

式(1)、式(2)也称为第二代曲波的正变换和反变换.

3　全变差正则化

从数学的角度看, 对通常的含噪图像模型: $f = u + n$ (其中 f 为含噪图像, u 为待恢复干净图像, n 为噪声), 从 f 中恢复出 u 是一个典型的不适定反问题. 为获得其稳定解一般需引入一个正则化约束项. 经典 Tikhonov 正则化对图像光滑部分十分有效, 但在边缘处往往会造成过光滑. 由于图像可被视为仅在边缘不连续的分片光滑函数, 而有界变差(bounded variation, BV) 空间允许不连续和陡梯度, 于是, Rudin 等人引入全变差正则函数, 在 BV 空间中约束图像的光滑性.

若函数 $u(x) \in L^1(\Omega)$, $\nabla u(x) \in L^1(\Omega)$, 则 $u(x)$ 的全变差可定义为:

$$TV(u) = \int_\Omega |\nabla u| \mathrm{d}x$$

其离散近似表示式为:

$$TV(u) = \sum_{i,j} \sqrt{a_{i,j}^2 + b_{i,j}^2 + c_{i,j}^2 + d_{i,j}^2}$$

其中 $a_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j}$, $b_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j}$,

$c_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j}$, $d_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j-1}$,

Rudin 等人提出的全变差正则化抑噪模型[10] (ROF 模型) 可表述为:

$$\min_{u \in BV(\Omega)} TV(u) + K\|f - u\|_{L^2}^2$$

其中第一项是正则项, 第二项是逼近项, 参数 K起平衡正则项和逼近项的作用. 一般来说, K值越大, 去除的噪声越少, f 和 u 也越接近, 而较小的 K值会使u 过光滑.

4　带曲波域约束的全变差正则化模型

411　新模型的提出

假设 $S_S(x) = \begin{cases} x, & |x| \geqslant S \\ 0, & |x| < S \end{cases}$ 表示阈值函数. 首先对含噪图像 f 进行第二代曲波变换, 然后通过阈值函数 $S_S(x)$ 对变换系数进行非线性阈值, 最后根据所保留系数进行重构, 得到干净图像 u 的一个估计:

$$\hat{u} = \sum_{L \in M} S_S(C_L(f)) U_L \qquad (3)$$

其中 $C_L(f) = \langle f, U_L \rangle$, M 表示所保留系数的指标集, 即 $M = \{L: |C_L(f)| \geqslant S\}$.

利用上述方法所得抑噪图像 $\hat{u}$, 往往会出现伪吉布斯振荡和/ 曲波状0伪曲线. 这些失真可被视为一种整体振荡, 而全变差正则化对图像的整体振荡性有较好的抑制作用. 为此本文通过引入全变差正则化技术, 建立了如下恢复模型:

$$\begin{cases} \min_{u \in U} TV(u) \\ U = \{u: u \in BV(\Omega), C_L(u) = C_L(f), L \in M\} \end{cases} \qquad (4)$$

该模型通过在曲波域内约束, u 和 f 经相同的曲波阈值后所保留系数相等, 将可行域限定为 BV 空间的线性子空间 U. 其实质是在保持曲波阈值系数 $S_S(C_L(f))$ 不变的前提下, 对小于阈值的系数作适当的修正后再进行重构.

若令 $V = \{v: v \in BV(\Omega), C_L(v) = 0, L \in M\}$, 它是 BV(Ω) 的线性子空间, 则可行域 U 还可表示为:

$$U = \{u: u \in BV(\Omega), u = \hat{u} + v, v \in V\} = \{\hat{u}\} + V$$

即 U 是方向由 V 所确定的仿射空间.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由于模型(4)中的目标函数是凸函数, 可行域 U 也是凸的, 所以可利用投影梯度算法进行求解, 即有:

$$\begin{cases} u^1 = \hat{u} \\ u^{k+1} = u^k - t_k P_V\left(g(TV(u^k))\right) \end{cases} \quad (5)$$

其中 t_k \ 0 表示迭代步长, g(#) 表示次梯度, P_V(#) 表示 V 上的正交投影.

全变差泛函的次梯度可利用如下关系式来计算[11]:

$$g\left(TV(u^k)\right) = -\ \cdot\cdot\#\left(\frac{\cdot\cdot u^k}{|\cdot\cdot u^k|}\right) \quad (6)$$

若记 T_C、T_C^{-1} 为第二代曲波的正变换和反变换, $S_S^{-1}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > S \\ x, & |x| [S \end{cases}$ 表示反阈值函数, 则正交投影算子 P_V(#) 可表示为:

$$P_V(\#) = T_C^{-1} S^{-1} T_C(\#) \quad (7)$$

412 算法描述

综上分析, 本文抑噪算法可归纳为:

Part1: 干净图像的曲波阈值估计

¹ 对含噪图像 f 进行第二代曲波变换:

$$C_L(f) = 3f, \ U4$$

º 非线性阈值: $S_S\left(C_L(f)\right)$

» 图像重构, $\hat{u} = \underset{LI\ M}{E} S_S\left(C_L(f)\right)$ U

Part2: 估计图像 û 的迭代修正

¹ 初始化: 设置最大迭代次数 Iter_ Num, 初值 $u^1 = \hat{u}$, k= 1;

º 由式(6)计算 $g\left(TV(u^k)\right)$;

» 由式(7)计算 $P_V\left(g(TV(u^k))\right)$;

¼ 取步长 $t_k = 1/\sqrt{k}$, 计算

$$u^{k+1} = u^k - t_k P_V\left(g(TV(u^k))\right);$$

½ 置 k: = k+ 1, 若 k< Iter_ Num, 则转至 Part2 º, 否则, 结束迭代.

关于上述迭代算法的收敛性, 有如下重要结果[7]:

定理 若步长序列(t_k)满足条件:

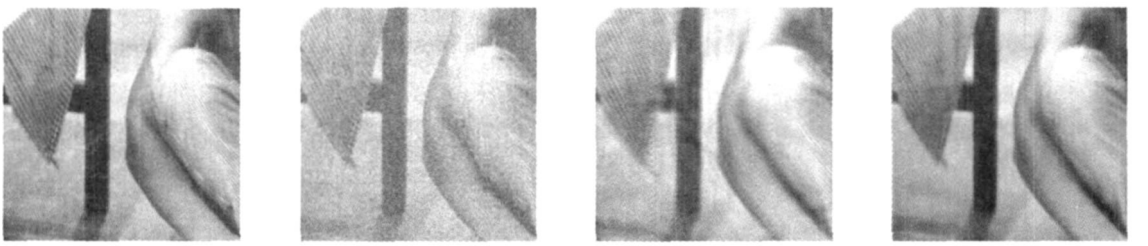
(1) $\lim\limits_{k\,y\,+\,]} t_k = 0$; (2) $\underset{k=0}{\overset{+\,]}{E}} t_k = +\ ]$; (3) $\underset{k=0}{\overset{+\,]}{E}} t_k^2 [\ +\ ]$, 则 $\lim\limits_{k\,y\,+\,]} \min\limits_{u\,I\,U} \|f - u^k\| = 0$, 且 $\lim\limits_{k\,y\,+\,]} TV(u^k) = \min\limits_{u\,I\,U} TV(u)$.

由此定理不难验证, 步长选为 $t_k = 1/\sqrt{k}$ 是适当的, 可以保证上述算法的收敛.

5 实验和结论

实验中采用 512 @512 的 Barbara 图像和 Lena 图像作为测试图像, 并对不同测试图像分别加入不同强度的高斯噪声; 曲波变换的数字实现采用文献[3]所提出的快速离散曲波变换(Discrete Curvelet Transform, DCuT); 阈值采用蒙特卡洛的方法进行选取; 客观评价指标采用峰值信噪比(PSNR)、均方根误差(RMSE)和相对熵(RE). 相对熵定义为: $RE = \underset{i=1}{\overset{N-1}{E}} p_i \log \frac{p_i}{\hat{p}_i}$, 其中 N 是图像的灰度级, p_i 是真实干净图像中灰度值为 i 的像素数与 N 之比, $\hat{p}_i$ 是抑噪图像中灰度值为 i 的像素数与 N 之比. 相对熵越小, 说明抑噪图像和真实干净图像的差异越小, 抑噪效果也就越好.

图 1 为利用 DCuT 硬阈值方法和本文方法对含噪 Barbara 图像(噪声方差为 35)的抑噪结果, 图 2 为利用 DCuT 软阈值方法和本文方法对含噪 Lena 图像(噪声方差为 30)经不同次迭代的抑噪结果. 不难看出, 利用 DCuT 阈值方法抑噪后, 出现了较为明显的 / 曲波状0伪曲线和伪吉布斯振荡, 而本文方法在抑噪的同时, 不仅较好地保持了图像的边缘, 而且使这些失真基本消失. 表 1 给出了在不同噪声级下, 两种方法对 Lena 图像抑噪后的客观性能指标比较, 各项指标显示, 本文方法较 DCuT 阈值方法有较为明显的改进, 而且在强噪声级下, 这种优势尤为突出.



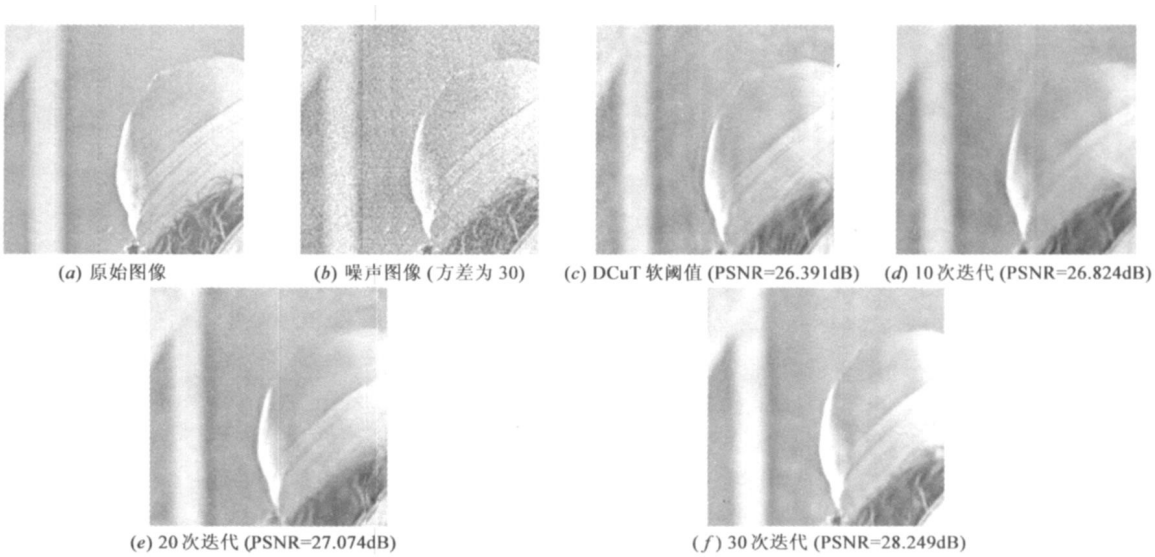
(a) 原始图像 (b) 噪声图像 (PSNR=18.56dB) (c) DCuT 硬阈值 (PSNR=25.48dB) (d) 本文方法 (PSNR=27.64dB)

图 1 DCuT 硬阈值和本文方法经 25 次迭代的抑噪结果

表 1 两种方法抑噪后的客观性能指标比较

噪声方差	含噪 Lena 图像			DCuT 硬阈值方法			本文方法(30 次迭代)		
	PSNR	RMSE	RE	PSNR	RMSE	RE	PSNR	RMSE	RE
20	22.133	19.947	0.092	29.610	10.618	0.024	29.953	9.351	0.028
30	18.563	30.087	0.156	26.391	12.218	0.083	28.249	10.735	0.077
40	16.105	39.972	0.217	24.361	13.757	0.105	26.012	11.295	0.082

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



(a) 原始图像　(b) 噪声图像 (方差为 30)　(c) DCuT 软阈值 (PSNR=26.391dB)　(d) 10 次迭代 (PSNR=26.824dB)

(e) 20 次迭代 (PSNR=27.074dB)　(f) 30 次迭代 (PSNR=28.249dB)

图 2　DCuT 软阈值和本文方法经不同次迭代的抑噪结果

本文的方法实质上是, 在曲波域对最优解进行约束的变分方法, 同简单阈值方法所不同的是, 不是简单地将小于阈值的系数置为零, 而是在全变差最小意义下, 对小于阈值的系数作适当的修正后再进行恢复. 这样一方面缩小了全变差则化方法的可行域空间, 另一方面, 又结合了曲波对高维函数的稀疏表示能力, 从而, 在抑噪和保护边缘信息的同时, 有效地抑制了伪吉布斯振荡和/曲波状0伪曲线的产生, 取得了较为理想的视觉效果. 需要说明的是, 本文方法在对纹理图像处理时, 会使一些纹理信息丢失. 究其原因, 在于 BV 空间对纹理图像不再是理想的函数空间, 须通过一定意义上与其对偶的空间来对纹理进一步建模, 这也是今后进一步值得研究的方向.

参考文献:

[1] E J Candes, D L Donoho. Curvelets- A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation for Objects with Edges[R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1999.

[2] E J Candes, D L Donoho. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C2 singularities[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(2): 219- 266.

[3] J L Starck, E J Candes, D L Donoho. The curvelet transform for image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(6): 670- 684.

[4] E J Candes, L Demanet, D L Donoho. Fast Discrete Curvelet Transforms[R]. USA: California Institute of Technology, 2005.

[5] A Chambolle, R A Devore, N Lee, et al. Nonlinear wavelet image processing: variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 1998, 7(3): 319- 335.

[6] S Durand, J Froment. Reconstruction of wavelet coefficients using total variation minimization[J]. SIAM Journal of Scientific Computing, 2003, 24(4): 1754- 1767.

[7] F Alter, S Durand, J Froment. Adapted total variation for artifact free decompression of JPEG images[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2005, 23(2): 199- 211.

[8] G Steidl, J Weickert, T Brox, et al. On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and SIDEs[J]. SIAM Numerical Analysis, 2004, 42(2): 686- 713.

[9] F Malgouyres. Minimizing the total variation under a general convex constraint for image restoration[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2002, 11(12): 1450- 1456.

[10] L I Rudin, S Osher, E Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1- 4): 259 - 268.

[11] You Yuli, Xu Wenyuan, Tannenbaum Allen, et al. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing[J]. IEEE Transactions on Image Processing. 1996, 5(11): 1539- 1553.

作者简介:

卢成武　男, 1970 年 10 月出生于甘肃玛曲, 2005 年 7 月毕业于西北大学, 获电路与系统专业工学硕士学位, 现为西安电子科技大学理学院博士研究生, 主要研究方向为小波理论、偏微分方程及其在图像处理中的应用.
E2mail: L_ chengwu@163. com

宋国乡　女, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为数值计算、小波理论及其应用.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net